豊橋技術科学大学

2011 年 工学部 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=mx\cos(mx)-\sin(mx)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，m は正の整数とする．

(1) $f(x)$ が極値をとる最も小さい正の実数 x を，m を用いて表せ．

(2) $m=2$ のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $m=3$ のとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ における曲線の接線が y 軸と交わる点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(4) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$ が成り立つために m が満たすべき条件を求めよ．

(1) $f'(x)=m\cos(mx)-m^2x\sin(mx)-m\cos(mx)$

$=-m^2x\sin(mx)$

$x>0$ より．$f'(x)=0$ となる最小の x は．$x=\frac{\pi}{m}$ //

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{m}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

(2) (1) より $m=2$ のときは、$f'(x)=-4\sin(2x)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より．$f'(x)=0$ となるのは．$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$

増減表より．

$f(x)$ は $x=2\pi$ のとき最大値 4π をとる //

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	2π	↘	-3π	↗	4π

(3) $m=3$ のとき．$f'(x)=-9x\sin(3x)$

$\therefore$ 接線は．$y=-9\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}\pi\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ y=\frac{9}{2}\pi x-\frac{9}{4}\pi^2+1$ $\therefore$ y 軸と交わるのは $\left(0,\ 1-\frac{9}{4}\pi^2\right)$ //

(4) $\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}x\{\sin(mx)\}'\,dx-\int_0^{\pi}\sin(mx)\,dx$

$=\Big[x\sin(mx)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(mx)\,dx-\Big[-\frac{1}{m}\cos(mx)\Big]_0^{\pi}$

$=-\Big[-\frac{1}{m}\cos(mx)\Big]_0^{\pi}-\left(-\frac{1}{m}\cos(m\pi)+\frac{1}{m}\right)$

$=\frac{2}{m}\{\cos(m\pi)-1\}$

$\therefore\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0 \iff \cos(m\pi)=1$ $\therefore$ m は正の偶数 //