

2016年教育学部(中等数学)第3問

3 2つの数列  $\{\theta_n\}$ ,  $\{a_n\}$  を漸化式

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{|2 - a_n|} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{\theta_n\}$  の一般項を求めよ。また  $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。
- (2)  $\cos \theta_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。
- (3)  $2 \cos \theta_n = a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  の値を求めよ。