

2014年工（電気電子工，建築）第4問



4 xy 平面上に関数 $y = e^x$ のグラフ C_1 と関数 $y = a\sqrt{x}$ ($a > 0$) のグラフ C_2 があり，ただ1つの共有点 A をもち，点 A で同一の接線をもつ．このとき，次の問に答えよ．

- (1) 点 A の x 座標と a の値を求めよ．
 (2) C_1 と C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．
 (3) (2) の図形を x 軸で1回転させた回転体の体積を求めよ．

(1) $f(x) = e^x$ ， $g(x) = a\sqrt{x}$ ($a > 0$) とおくと，点 A の x 座標を t とするとき．

条件より， $f(t) = g(t)$ から $f'(t) = g'(t)$

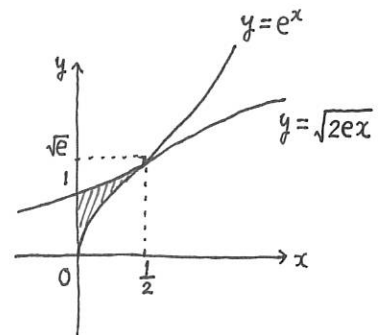
$$\therefore e^t = a\sqrt{t} \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad e^t = \frac{a}{2\sqrt{t}} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } a\sqrt{t} = \frac{a}{2\sqrt{t}}$$

$$a > 0 \text{ より, } t = \frac{1}{2} \quad \therefore \underline{\text{点 } A \text{ の } x \text{ 座標は } \frac{1}{2}} \text{, } \textcircled{1} \text{ より, } \underline{a = \sqrt{2e}}$$

(2) 求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^x - \sqrt{2e} x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[e^x - \frac{2}{3}\sqrt{2e} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{e} - \frac{2}{3}\sqrt{2e} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{e} - 1}} \end{aligned}$$



(3) 求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} - (\sqrt{2e}x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} - ex^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{e-2}{4} \pi}} \end{aligned}$$