

東北大学



2013年理系第5問

 $oxed{5}$ 2 次の正方行列 A を $A=\left(egin{array}{ccc} -rac{1}{\sqrt{2}} & -rac{1}{\sqrt{2}} \ rac{1}{\sqrt{2}} & -rac{1}{\sqrt{2}} \end{array}
ight)$ で定める。 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して,点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める. ただし, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ とする.

- (1) A^4 を求めよ.
- (2) $n=0, 1, 2, \cdots$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ、ただし、 E は 2 次の単位行列とする.

(3) 原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ.