2016年 理系 第4問

$\boxed{4}$ a, bを実数とする．$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$とし，xについての方程式$f(x)=b$を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a>0$のとき，関数$f(x)$の最大値を求めよ．

(2) 方程式$f(x)=b$の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ．

(1) $f'(x)=2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-2ax$

$\quad=2x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\right)$

$\therefore$ $f'(x)=0$となるのは，$x=0$または $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=a$ $\iff$ $x=0$ または $x^2=\dfrac{1-a^2}{a^2}$

(i) $0<a<1$のとき

$\alpha=-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ とおくと増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$		$\searrow$

ここで，$\alpha^2=\beta^2=\dfrac{1-a^2}{a^2}$ より，$f(\alpha)=f(\beta)=a+\dfrac{1}{a}$

$\therefore$ 最大値は $a+\dfrac{1}{a}$

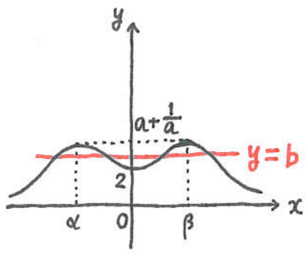
(ii) $a\geqq 1$のとき

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leqq a$ より 増減表は右のようになる

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

よって，最大値は 2

(i),(ii)より，最大値は，$\begin{cases} a+\dfrac{1}{a} & (0<a<1\text{のとき}) \\ 2 & (a\geqq 1\text{のとき}) \end{cases}$ //



(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\sqrt{1+x^2}+ax^2}{(2\sqrt{1+x^2}-ax^2)(2\sqrt{1+x^2}+ax^2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\sqrt{1+x^2}+ax^2}{4(1+x^2)-a^2x^4}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^6}}+\frac{a}{x^2}}{4\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)-a^2}$

$=0$

答えには影響しないのでなくてO.K.

$\therefore$ $f(x)=b$の実数解の個数が最も多くなるのは，$0<a<1$ かつ $2<b<a+\dfrac{1}{a}$のとき

$\therefore$ 右図の斜線部分（ただし境界線は含まない）