



2010年第4問

4 | 四面体 ABCD において, 辺 AB の中点を M, 辺 CD の中点を N とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 等式

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

を満たす点 P は存在するか. 証明をつけて答えよ.

(2) 点 Q が等式

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

を満たしながら動くとき, 点 Q が描く図形を求めよ.

(3) 点 R が等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき、内積 \overrightarrow{MN} ・ \overrightarrow{MR} は \overrightarrow{R} のとり方によらず一定であることを示せ、

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であること を示せ.