東北大学

2015年 理系 第1問

数理 石井K

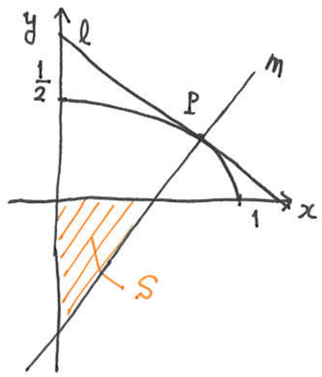
$\boxed{1}$ xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

楕円の一部

参考 $P\left(\cos\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ とおいてもよい

Pを C 上の点とする．Pで C に接する直線を ℓ とし，Pを通り ℓ と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Pが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのPの座標を求めよ．



点P を $P(a,b)$ $(a>0,\ b>0)$ とおくと．

C上にあることより． $a^2+4b^2=1$ … ①

このとき接線 ℓ は $ax+4by=1$ （傾き $-\frac{a}{4b}$）

$\therefore\ m:\ y=\frac{4b}{a}(x-a)+b$

$\Leftrightarrow\ m:\ y=\frac{4b}{a}x-3b$

$\therefore$ m と x 軸，y 軸の交点は それぞれ $\left(\frac{3}{4}a,0\right)$，$(0,-3b)$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a\cdot 3b=\frac{9}{8}ab$

①と相加・相乗の関係より． $1=a^2+4b^2\geqq 2\sqrt{a^2\cdot 4b^2}=4ab$

$\therefore\ ab\leqq\frac{1}{4}$ $\qquad\therefore\ S=\frac{9}{8}ab\leqq\frac{9}{32}$

$\therefore$ S の最大値は $\frac{9}{32}$ // で そのとき． $a^2=4b^2$ すなわち $a=2b$

①より． $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき．

$\therefore\ P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ //