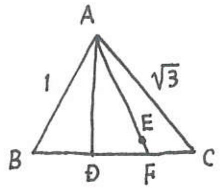
0001989720108999

静岡大学

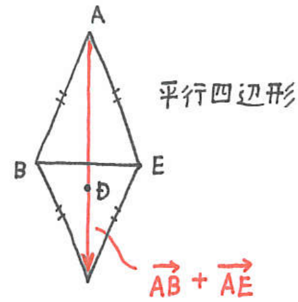
2015年 教育・農・理（生物，地球） 第2問

$\boxed{2}$ △ABCにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$であるとする．辺BCを1：2に内分する点をD，線分ADに関してBと対称な点をE，直線AEと辺BCの交点をFとする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{AE}$を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{AF}$を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
(3) DF：BCを求めよ．

(1) $\overrightarrow{AE}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおくと，



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=(s+1)\vec{b}+t\vec{c}$

このベクトルと $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ は同じ向きに平行であるから，

$(s+1)\vec{b}+t\vec{c}=k\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$ $(k>0)$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立より，$\begin{cases} s+1=\frac{2}{3}k & \cdots① \\ t=\frac{1}{3}k & \cdots② \end{cases}$

また，$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AB}|=1$ なので，

$|\overrightarrow{AE}|^2=s^2|\vec{b}|^2+2st\,\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$
$=s^2+2st+3t^2$

$\therefore\ s^2+2st+3t^2=1\ \cdots③$

③に①，②を代入して，

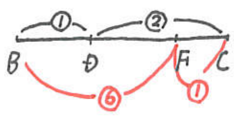
$\left(\frac{2}{3}k-1\right)^2+2\cdot\left(\frac{2}{3}k-1\right)\cdot\frac{1}{3}k+3\cdot\left(\frac{1}{3}k\right)^2=1$

$\therefore\ \frac{11}{9}k^2-2k=0$ $\quad\therefore\ \frac{11}{9}k\left(k-\frac{18}{11}\right)=0$

$k>0$より，$k=\frac{18}{11}$ $\quad\therefore\ s=\frac{1}{11}$，$t=\frac{6}{11}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{11}\vec{b}+\frac{6}{11}\vec{c}}$ //

(2) $\overrightarrow{AE}=\frac{7}{11}\left(\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{6}{7}\vec{c}\right)$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{6}{7}\vec{c}}$ //

(3) 右の図と 3と7の最小公倍数が21であることから，



BD：DF：FC＝7：11：3

$\therefore$ $\underline{\text{DF：BC}=11:21}$ //