0002109900987999

島根大学

2015年 教育・生物資源科学部 第3問

$\boxed{3}$ a, b, c を実数とし，関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える．

$$I=\int_0^1 \{f'(x)\}^2\,dx$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) I を a と b を用いて表せ．

(2) θ を $0 \leqq \theta < \pi$ をみたす実数とする．$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ のとき，I を $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた I の最大値，最小値を求めよ．

(1) $I=\int_0^1 (2ax+b)^2\,dx$

$=\int_0^1 4a^2x^2+4abx+b^2\,dx$

$=\left[\frac{4}{3}a^2x^3+2abx^2+b^2x\right]_0^1$

$=\underline{\frac{4}{3}a^2+2ab+b^2}$ //

(2) $I=\frac{4}{3}\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\underline{\frac{1}{6}\cos 2\theta+\sin 2\theta+\frac{7}{6}}$ //

(3) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{37}}{6}$ より．$I=\frac{\sqrt{37}}{6}\left(\sin 2\theta\cdot\frac{6}{\sqrt{37}}+\cos 2\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{37}}\right)+\frac{7}{6}$

$=\frac{\sqrt{37}}{6}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{7}{6}$

ただし，$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}}$

$0\leqq\theta<\pi$ より．$\alpha\leqq 2\theta+\alpha<2\pi+\alpha$ であるから

<u>最大値は $\frac{\sqrt{37}+7}{6}$，最小値は $\frac{-\sqrt{37}+7}{6}$</u> //