立教大学

2014年 理学部（個別日程） 第4問

数理 石井K

4 a を正の実数とする．座標平面上に4点 O(0, 0)，A(a, 0)，B(a, a)，C(0, a) がある．四角形 OABC の辺 AB 上に点 P(a, p) をとり，点 P を通り AC と平行な直線と BC との交点を Q とする．このとき，次の問に答えよ．

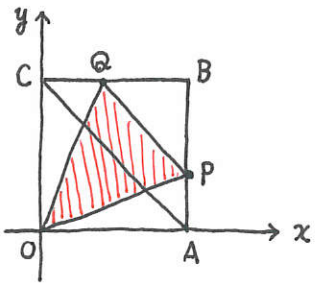
(1) 三角形 OPQ の面積 S を a と p を用いて表せ．

(2) 三角形 OPQ の外接円の半径 R を a と p を用いて表せ．

(3) 三角形 OAP と三角形 PBQ の面積がともに1であるとき，$a-p$ と $a+p$ の値を求めよ．

(4) (3)のとき，a と p の値を求めよ．

(5) a と p が(4)で求めた値であるとき，三角形 OPQ の内接円の半径 r の値を求めよ．



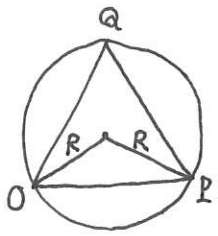
(1) $P(a,p)$, $Q(p,a)$ より.

$S=\frac{1}{2}|a^2-p^2|$

ここで, $0\leqq p\leqq a$ より. $S=\frac{1}{2}(a^2-p^2)$ //

(2) $\triangle OPQ$ が二等辺三角形であることから.

外接円の中心は (t,t) とおける.



$R=\sqrt{2}t=\sqrt{(t-a)^2+(t-p)^2}$

$\therefore 2t^2=2t^2-2at+a^2-2tp+p^2$

$\therefore t=\frac{a^2+p^2}{2(a+p)}$ $\therefore R=\frac{a^2+p^2}{\sqrt{2}(a+p)}$ //

(3) $\triangle OAP=\frac{1}{2}ap$, $\triangle PBQ=\frac{1}{2}(a-p)^2$

$\therefore \frac{1}{2}(a-p)^2=1$ より $a-p=\sqrt{2}$ //

$\frac{1}{2}(a+p)^2=\underbrace{\frac{1}{2}(a-p)^2}_{=1}+4\cdot\underbrace{\frac{1}{2}ap}_{=1}$ より.

$(a+p)^2=10$ $\therefore a+p=\sqrt{10}$ //

(4) (3)より. $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$, $p=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ //

(5) $S=\frac{1}{2}r(OP+PQ+OQ)$ より. $\frac{1}{2}(a-p)(a+p)=\frac{1}{2}r\left(\sqrt{a^2+p^2}+\sqrt{2}(a-p)+\sqrt{a^2+p^2}\right)$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=\frac{1}{2}r(2\sqrt{6}+2)$

$\therefore r=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+1}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}-1)}{6-1}=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{5}}{5}$ //