

2011年工学部第2問

2 正の整数 n に対して、 $S_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ とおく。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) $S_{n+1}(x)$ を n 、 x および $S_n(x)$ を用いて表せ。

(2) m を正の整数とする。 $x > 0$ のとき、不等式 $e^{\frac{x}{m+1}} > \frac{x}{m+1}$ が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ となることを示せ。

(3) 数学的帰納法を用いて、すべての正の整数 n に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n(x) = n!$ となることを示せ。