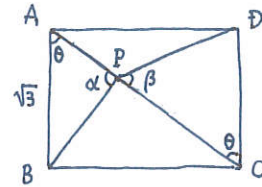


2015年教育学部(その他)第1問

数理
石井K

1 長方形 ABCD の対角線 AC 上に点 P をとり,

$$AB = \sqrt{3}, \quad \angle APB = \alpha, \quad \angle CPD = \beta, \quad \angle BAC = \theta$$



とする。ただし、P は A, C 以外の点である。次の問に答えよ。

(1) AP の長さを α, θ を用いて表し、PC の長さを β, θ を用いて表せ。

(2) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$ を θ を用いて表せ。

(3) $BC = 2 + \sqrt{7}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ のとき、 α を求めよ。

(1) 正弦定理より、 $\frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{AP}{\sin(\pi - \alpha - \theta)}$ $\therefore AP = \frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha}$ //

錯角より、 $\angle ACD = \theta$

よって、正弦定理より、 $\frac{\sqrt{3}}{\sin \beta} = \frac{PC}{\sin(\pi - \beta - \theta)}$ $\therefore PC = \frac{\sqrt{3} \sin(\beta + \theta)}{\sin \beta}$ //

(2) $AP \cos \theta + PC \cos \theta = \sqrt{3}$ であるから、

$$\frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \theta) \cos \theta}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{3} \sin(\beta + \theta) \cos \theta}{\sin \beta} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha \cos^2 \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \theta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \beta \cos^2 \theta + \cos \beta \sin \theta \cos \theta}{\sin \beta} = 1$$

$$\therefore 2 \cos^2 \theta + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= -\frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} //$$

(3) 三平方の定理より、 $AC = \sqrt{3 + (2 + \sqrt{7})^2} = \sqrt{14 + 4\sqrt{7}}$ $\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14 + 4\sqrt{7}}}$, $\sin \theta = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{14 + 4\sqrt{7}}}$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{3}{14 + 4\sqrt{7}} - \frac{11 + 4\sqrt{7}}{14 + 4\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}, \quad \sin 2\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14 + 4\sqrt{7}}} \cdot \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{14 + 4\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

\therefore (2) で求めた式に代入すると、

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -2 \cdot \frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{21}} \quad \therefore \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{これを角解して、} 0 < \alpha < \pi \text{ より、} \alpha = \frac{\pi}{3} //$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3}$$

