名城大学

2016年 法学部 第4問

$\boxed{4}$ $f(x)=2x^3+(a-1)x^2-a+1$（aは$a \neq 1$を満たす実数）とするとき，次の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$のグラフはaの値によらず2定点を通ることを示し，その座標を求めよ．

(2) $f(x)$の極大値を与えるxの値mを求めよ．

(3) aが$a \neq 1$を満たす実数全体を動く．(2)のmに対し，点$(m,\ f(m))$の軌跡をxy平面上に図示せよ．

(1) $y=f(x) \iff a(x^2-1)+2x^3-x^2+1-y=0$

$\iff a(x+1)(x-1)+2x^3-x^2+1-y=0 \quad \cdots (*)$

これがaの値によらず成り立つのは

$(x+1)(x-1)=0$ かつ $2x^3-x^2+1-y=0$ のとき

$\therefore (x,y)=(-1,-2),(1,2)$

逆にこのとき(*)は成り立っている ▨ $\underline{(-1,-2),(1,2)}$ //

(2) $f'(x)=6x^2+2(a-1)x$

$=2x(3x+a-1)$

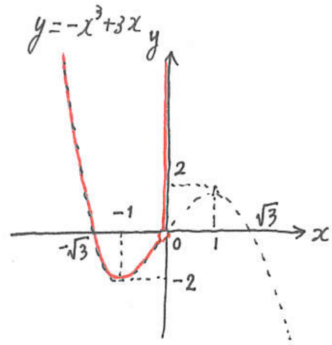
$\therefore f'(x)=0$ となるのは．$x=0,\ \dfrac{1-a}{3}$ のとき．

$\therefore$ $a<1$ のとき．$x=0$ で極大

$a>1$ のとき $x=\dfrac{1-a}{3}$ で極大

すぐに分からなかったら 増減表をかいてみよう．

以上より．$m=\begin{cases} 0 & (a<1\text{のとき}) \\ \dfrac{1-a}{3} & (a>1\text{のとき}) \end{cases}$ //



(3) $a<1$ のとき．$(m, f(m))=(0, 1-a)$ $\therefore$ aが$a \neq 1$を動くとき．

この点の軌跡は．直線の一部 $x=0,\ y>0$ となる

$a>1$ のとき．$(m, f(m))=\left(\dfrac{1-a}{3},\ \dfrac{27(1-a)-(1-a)^3}{27}\right)$

これを(X,Y)とおくと．$1-a=3X$ であるから．$Y=3X-\dfrac{(3X)^3}{27}$ $\therefore Y=-X^3+3X$

また，$1-a<0$ より．$X<0$ $\therefore$ ~~放物線~~曲線の一部 $y=-x^3+3x \ (x<0)$

$\therefore$ 右上図の実線部分（ただし原点は除く）