

2016年工学部第1問

1 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $a_n = 2^n$ とする. 自然数 N に対して, a_0, a_1, \dots, a_N から重複なしにいくつかを選んで和をとるという操作を考える. 例えば, $N = 1$ のときには, この操作によって自然数 $1, 2, 3$ を作ることができる ($1 = a_0, 2 = a_1, 3 = a_0 + a_1$). 次の問いに答えなさい.

- (1) $N = 2$ のとき, 7 以下のすべての自然数をこの操作によって作りなさい.
- (2) この操作によって作ることのできる最大の自然数は $2^{N+1} - 1$ であることを示しなさい.
- (3) 自然数 N に対して, $2^{N+1} - 1$ 以下のすべての自然数をこの操作によって作ることができる. このことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.
- (4) この操作によって 253 を作ることのできる最小の N の値を求めなさい.