0001798541028999

京都教育大学

2013年 教育学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 百の位が a，十の位が b，一の位が c である1以上999以下の整数がある．ただし，この整数が99以下のときは百の位が0であるとみなし，さらに9以下のときは十の位も0であるとみなす．この整数が各位の数の和の3乗に等しいとき次の問に答えよ．

(1) $(a+b+c)^3-(a+b+c)$ は9の倍数であることを証明せよ．

(2) 多項式 $(x+y+z)^3-(x+y+z)$ を因数分解せよ．

(3) このような整数をすべて求めよ．

(1) この整数が各位の数の和の3乗に等しいので

$$100a+10b+c=(a+b+c)^3$$

$$\therefore (a+b+c)^3-(a+b+c)=100a+10b+c-(a+b+c)$$
$$=9(11a+b)$$

$11a+b$ は整数となるから，右辺は9の倍数　∴ 与式は9の倍数となる ▨

(2) $(与式)=(x+y+z)^3-(x+y+z)$

$$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-1^2\}$$

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ より，

$$=\underline{(x+y+z)(x+y+z+1)(x+y+z-1)}$$ //

(3) (2)の結果に，$x=a$，$y=b$，$z=c$ を代入して，(1)より，

$(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c-1)$ は9の倍数となる．

また，$1\leqq a+b+c\leqq 27$ なので

$a+b+c=1,8,9,10,17,18,19,26,27$

元の整数を N とおくと，$N=(a+b+c)^3$ なので

$a+b+c\geqq 10$ のとき $N\geqq 10^3=1000$ となり不適

(i) $a+b+c=1$ のとき，$N=1^3=1$　　$0+0+1=1$ となり o.k.

(ii) $a+b+c=8$ のとき，$N=8^3=512$　　$5+1+2=8$　o.k.

(iii) $a+b+c=9$ のとき，$N=9^3=729$　　$7+2+9=18$　不適

(i)〜(iii) より，$N=\underline{1,512}$ //