慶應義塾大学

2015年 薬学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 ボタンを1回押すたびに1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかの数字が1つ画面に表示される機械がある．このうちの1つの数字 Q が表示される確率は $\frac{1}{k}$ であり，Q 以外の数字が表示される確率はいずれも等しいとする．ただし，k は $k>6$ を満たす自然数とする．

ボタンを1回押して表示された数字を確認する試行を繰り返すとき，1回目に4の数字，2回目に5の数字が表示される確率は，1回目に5の数字，2回目に6の数字が表示される確率の $\frac{8}{5}$ 倍である．このとき，

(1) Q は $\boxed{59}$ であり，k は $\boxed{60}$ である．（59: 6, 60: 9）

(2) この試行を3回繰り返すとき，表示された3つの数字の和が16となる確率は

$$\frac{\boxed{61}\boxed{62}\boxed{63}}{\boxed{64}\boxed{65}\boxed{66}\boxed{67}}$$

（61: 1, 62: 0, 63: 4, 64: 6, 65: 0, 66: 7, 67: 5）

である．

(3) この試行を500回繰り返すとき，そのうち Q の数字が n 回表示される確率を P_n とおくと，P_n の値が最も大きくなる n の値は $\boxed{68}\boxed{69}$ である．（68: 5, 69: 5）

(1) 4→5 となる確率の方が 5→6 となる確率より大きく，5は共通で出ている

また．Q が出る確率が $\frac{1}{k}$ より，Q 以外の数字 R が表示される確率は．$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{5k}$

他の目より出にくい

$\frac{1}{k}<\frac{1}{6}$ なので，$\underline{Q=6}$ //

$$\left(\frac{k-1}{5k}\right)^2=\frac{8}{5}\cdot\frac{k-1}{5k}\cdot\frac{1}{k} \qquad \therefore \underline{k=9} \text{ //}$$

(2) $\{4,6,6\}$，$\{5,5,6\}$ のときなので．Q 以外の数字 R が出る確率は $\frac{k-1}{5k}=\frac{8}{45}$ より．

$$\frac{8}{45}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot {}_3C_1+\left(\frac{8}{45}\right)^2\cdot\frac{1}{9}\cdot {}_3C_1=\frac{8}{45}\cdot\frac{1}{9}\cdot 3\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{45}\right)$$

$$=\underline{\frac{104}{6075}} \text{ //}$$

(3) Q が出る確率を q とおく

$$P_n=q^n\cdot(1-q)^{500-n}\cdot {}_{500}C_n$$

$$=q^n(1-q)^{500-n}\cdot\frac{500!}{n!(500-n)!}$$

$$\therefore \frac{P_{n+1}}{P_n}=q^{n+1}(1-q)^{499-n}\cdot\frac{500!}{(n+1)!(499-n)!}\cdot\frac{1}{q^n(1-q)^{500-n}}\cdot\frac{n!(500-n)!}{500!}$$

$$=\frac{q}{1-q}\cdot\frac{500-n}{n+1}$$

2015年 薬学部 第4問　２枚目／２枚

$\boxed{4}$ ボタンを1回押すたびに1, 2, 3, 4, 5, 6のいずれかの数字が1つ画面に表示される機械がある．このうちの1つの数字Qが表示される確率は$\dfrac{1}{k}$であり，Q以外の数字が表示される確率はいずれも等しいとする．ただし，kは$k>6$を満たす自然数とする．

ボタンを1回押して表示された数字を確認する試行を繰り返すとき，1回目に4の数字，2回目に5の数字が表示される確率は，1回目に5の数字，2回目に6の数字が表示される確率の$\dfrac{8}{5}$倍である．このとき，

(1) Qは $\boxed{59}$ であり，kは $\boxed{60}$ である．

(2) この試行を3回繰り返すとき，表示された3つの数字の和が16となる確率は

$$\frac{\boxed{61}\boxed{62}\boxed{63}}{\boxed{64}\boxed{65}\boxed{66}\boxed{67}}$$

である．

(3) この試行を500回繰り返すとき，そのうちQの数字がn回表示される確率をP_nとおくと，P_nの値が最も大きくなるnの値は $\boxed{68}\boxed{69}$ である．

(3)のつづき．

$q=\frac{1}{9}$を代入して $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{500-n}{8(n+1)}$

$$\therefore\ P_n \leqq P_{n+1} \iff \frac{P_{n+1}}{P_n} \geqq 1$$

$$\iff \frac{500-n}{8(n+1)} \geqq 1$$

$$\iff 500-n \geqq 8n+8$$

$$\iff 9n \leqq 492$$

$$\iff n \leqq \frac{164}{3} \fallingdotseq 54.66$$

$$\therefore\ P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_{54} < P_{55} > P_{56} > \cdots$$

$$\therefore\ \underline{n=55}_{\,/\!/}$$