



2010年第4問

4 四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC} + \vec{PD}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式

$$|\vec{QA} + \vec{QB}| = |\vec{QC} + \vec{QD}|$$

を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式

$$|\vec{RA}|^2 + |\vec{RB}|^2 = |\vec{RC}|^2 + |\vec{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき、内積 $\vec{MN} \cdot \vec{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ であることを示せ。