



2012年理系第1問

1 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換によって、2点 $P(1, 1)$, $Q(2, 2)$ は連立不等式 $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ の表す領域内の点 P' , Q' にそれぞれ移されるものとする。ただし、 a, b, c, d は正の実数で $a > c$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $a + b = 1$ および $c + d = 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 4点 $O(0, 0)$, $R(a, c)$, $S(a + b, c + d)$, $T(b, d)$ を頂点とする平行四辺形 $ORST$ の面積を p とするとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$A \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3) 自然数 n に対して、 a_n, b_n, c_n, d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める。このとき a_n, b_n, c_n, d_n を b, c, n および (2) の p を用いて表せ。

(4) $A^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ。