0001872547218999

2014年 第1問

数理 石井K

1 関数 $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x+2}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，eは自然対数の底とする．

(1) 極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ を C とするとき，C の変曲点の座標を求めよ．

(4) 曲線 C の変曲点における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(5) 曲線 C，y 軸および接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}=1$ //，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to\infty}\dfrac{e^{-t}-2}{e^{-t}+2}=-1$ //

(2) $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+2)-(e^x-2)\cdot e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{4e^x}{(e^x+2)^2}$ //

$f''(x)=\dfrac{4e^x(e^x+2)^2-4e^x\cdot 2(e^x+2)\cdot e^x}{(e^x+2)^4}=\dfrac{-4e^x(e^x+2)(e^x-2)}{(e^x+2)^4}=\dfrac{4e^x(2-e^x)}{(e^x+2)^3}$ //

(3) $f'(x)>0$，$f''(x)=0$ となるのは，$x=\log 2$

右の増減表より，変曲点は $(\log 2,\ 0)$ //

x	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗

(4) $y=\dfrac{4\cdot 2}{4^2}(x-\log 2)$

$\therefore\ \ell:\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\log 2$ //

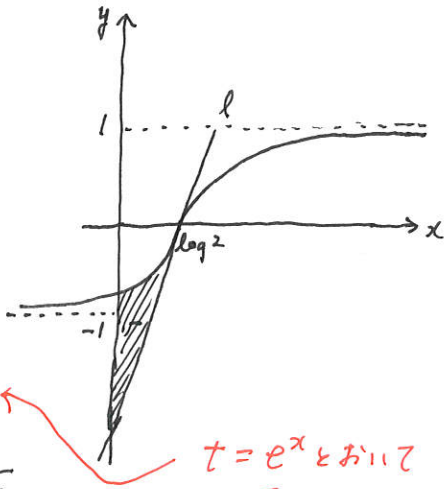
(5) $S=\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{e^x-2}{e^x+2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log 2\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{(e^x+2)'}{e^x+2}-\frac{2}{e^x+2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log 2\,dx$

$=\left[\log|e^x+2|-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}\log 2\right]_0^{\log 2}-2\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{dx}{e^x+2}$

$=\log 4-\dfrac{1}{4}(\log 2)^2+\dfrac{1}{2}(\log 2)^2-\log 3-2\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{t(t+2)}$

$=\dfrac{1}{4}(\log 2)^2+3\log 2-2\log 3$ //



$t=e^x$ とおいて置換積分