

2014年 第3問

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 不等式 $a_n < n$ を数学的帰納法によって証明せよ.
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{n}{n - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める. b_{n+1} を b_n を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!}$ を求めよ.