愛知教育大学

2014年 第5問

数理 石井K

5 座標空間内の4点O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)に対して線分OAの中点をP, 線分ABを$q:(1-q)$の比に内分する点をQ, 線分BCを$r:(1-r)$の比に内分する点をR, 線分COを$s:(1-s)$の比に内分する点をSとする．ただし，$0<q<1$, $0<r<1$, $0<s<1$である．4点P, Q, R, Sが同一平面上にあるとき，sをq, rを用いて表せ．

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

$\overrightarrow{OQ} = (1-q)\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = (1-q, q, 0)$

$\overrightarrow{OR} = (1-r)\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC} = (0, 1-r, r)$

$\overrightarrow{OS} = (1-s)\overrightarrow{OC} = (0, 0, 1-s)$

4点, P, Q, R, S が同一平面上にあるとき,

$\overrightarrow{PS} = x\overrightarrow{PQ} + y\overrightarrow{PR}$ となる実数 x, y が存在する.

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, 0, 1-s\right) = x\left(\frac{1}{2}-q, q, 0\right) + y\left(-\frac{1}{2}, 1-r, r\right)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}-q\right)x - \frac{1}{2}y & \cdots① \\ 0 = qx + (1-r)y & \cdots② \\ 1-s = ry & \cdots③ \end{cases}$$

①+②より, $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}-r\right)y$

両辺$2q$をかけて, $-q = qx + (1-2r)qy \cdots④$

②−④より. $q = (1-r-q+2qr)y$

$q \neq 0$ より. $1-r-q+2qr \neq 0$ $\therefore y = \dfrac{q}{1-r-q+2qr}$

③に代入して, $1-s = \dfrac{qr}{1-r-q+2qr}$

$$\therefore \underline{s = 1 - \frac{qr}{2qr-q-r+1}}$$