2016年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，$i$ は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 $a_0$，…，$a_7$ をすべて求めよ．

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1)で求めた $a_1$，$a_3$，$a_5$，$a_7$ を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える．$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1$，2，3 について

$$x_k=\frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ．