0001643366538999

東北大学

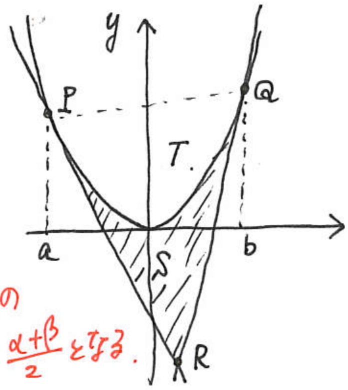
2014年 第1問

$\boxed{1}$ 曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $P(a,\ a^2)$ における接線を ℓ_1，点 $Q(b,\ b^2)$ における接線を ℓ_2 とする．ただし，$a<b$ とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする．

(1) R の座標を a と b を用いて表せ．

(2) S を a と b を用いて表せ．

(3) ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ．



(1) C の P での接線は $y'=2x$ より．

$y=2a(x-a)+a^2$

$\therefore\ \ell_1: y=2ax-a^2$ となる．

同様に，$\ell_2: y=2bx-b^2$

$\therefore\ (a-b)\cdot 2x-(a^2-b^2)=0$

$\therefore\ (a-b)\{2x-(a+b)\}=0$

$a \neq b$ より．$x=\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore\ R\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$ //

メモ．
一般に放物線の
$x=\alpha,\beta$ の接線どうしの
交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となる．

(2) 直線 PQ と C で囲まれた面積を T とおくと．

$S=\triangle PQR-T$

ここで R が原点に重なるように平行移動すると．

$P \to P'\left(\dfrac{a-b}{2},\ a^2-ab\right)$，$Q \to Q'\left(\dfrac{b-a}{2},\ b^2-ab\right)$

$\therefore\ \triangle PQR=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{2}(b-a)\cdot a\cdot(a-b)-\dfrac{1}{2}(a-b)\cdot b\cdot(b-a)\right|$

$=\dfrac{1}{4}(b-a)^3$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{4}(b-a)^3-\displaystyle\int_a^b (a+b)x-ab-x^2\,dx$

$=\dfrac{1}{4}(b-a)^3+\displaystyle\int_a^b (x-b)(x-a)\,dx$

$=\dfrac{1}{4}(b-a)^3-\dfrac{1}{6}(b-a)^3$

$=\dfrac{1}{12}(b-a)^3$ //

(3) $\ell_1 \perp \ell_2$ より．

$2a\cdot 2b=-1$　$\therefore\ ab=-\dfrac{1}{4}$

$b>a$ より．$a<0,\ b>0$

相加・相乗の関係より

$b+(-a) \geqq 2\sqrt{-ab}=1$

等号成立は
$b=-a$ のとき
すなわち，$a=-\dfrac{1}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ S \geqq \dfrac{1}{12}\cdot 1^3=\dfrac{1}{12}$

$\therefore$ 最小値 $\dfrac{1}{12}$ $\left(a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\right)$ //