首都大学東京

2014年 第3問

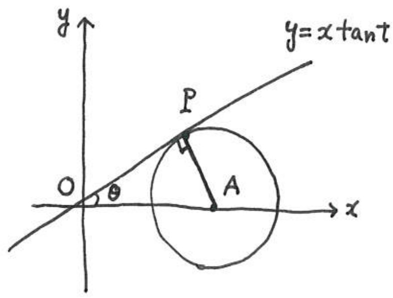
数理 石井K

$\boxed{3}$ xy 平面において，x 軸の正の部分に中心Aをもつ半径1の円 C が，直線 $y = x\tan t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ に点Pで接している．以下の問いに答えなさい．

(1) 点Aと点Pの x 座標を求めなさい．

(2) x 軸の正の部分と円 C と直線 $y = x\tan t$ で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転した立体の体積 $V(t)$ を求めなさい．

(3) 極限値 $\lim_{t \to +0} tV(t)$ を求めなさい．



(1) 点Aのx座標は $\underline{\frac{1}{\sin t}}$ //

三平方の定理より $1^2 + OP^2 = \left(\frac{1}{\sin t}\right)^2$

$\therefore OP = \frac{1}{\tan t}$

$\therefore$ $\underline{点Pのx座標は\ OP \cdot \cos t = \frac{\cos^2 t}{\sin t}}$ //

(2) $C: \left(x - \frac{1}{\sin t}\right)^2 + y^2 = 1$，点Aのx座標を α，点Pのx座標を β とおくと．

$$\therefore V(t) = \pi\int_0^{\beta} (x\tan t)^2 dx - \pi\int_{\alpha-1}^{\beta} 1 - \left(x - \frac{1}{\sin t}\right)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \tan^2 t\right]_0^{\beta} - \pi\left[x - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{\sin t}\right)^3\right]_{\alpha-1}^{\beta}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 - \pi \cdot \left\{\frac{\cos^2 t}{\sin t} - \frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t} - \frac{1}{\sin t}\right)^3 - \frac{1}{\sin t} + 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin t} - 1 - \frac{1}{\sin t}\right)^3\right\}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{3}\left(\sin t + \frac{1}{\sin t} - 2\right)} \ //$$

(3) $$\lim_{t \to +0} tV(t) = \lim_{t \to +0} \frac{\pi}{3}\left(\underbrace{t\sin t}_{\to 0} + \underbrace{\frac{t}{\sin t}}_{\to 1} - \underbrace{2t}_{\to 0}\right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{3}} \ //$$