

2010年都市教養（文系）第3問

3 実数 a, b, c, d に対し x の3次の整式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える。ただし、 $ad \neq 0$ とする。方程式 $P(x) = 0$ の3つの解を α, β, γ とすると $P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ であることが知られている。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 積 $\alpha\beta\gamma$, 和 $\alpha + \beta + \gamma$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ を, それぞれ a, b, c, d を用いて表しなさい。
- (2) もし α が実数でないならば, 方程式 $P(x) = 0$ は α の共役な複素数 $\bar{\alpha}$ を解に持つことを証明しなさい。
- (3) 解 α, β, γ のうち実数となるものの個数は 0, 1, 2, 3 のどれか, 考えられる可能性をすべて, 理由も述べて答えなさい。
- (4) もし $ad > 0$ ならば, 解 α, β, γ のうち正の実数となるものの個数は 0, 1, 2, 3 のどれか, 考えられる可能性をすべて, 理由も述べて答えなさい。