

2016年 都市教養（文系）第2問

2 数直線上に2点 $Q(-1)$ と $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$ をとり、線分 QP_1 を $3:1$ に外分する点を P_2 、線分 QP_2 を $3:1$ に外分する点を P_3 とする。以下同様に $n = 1, 2, \dots$ に対し線分 QP_n を $3:1$ に外分する点を P_{n+1} とする。また P_n の座標を a_n とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) A を数直線上の Q と異なる点とする。線分 QA を $3:1$ に外分する点が P_1 であるとき、 A の座標 a を求めなさい。
- (2) すべての自然数 n に対して

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明しなさい。

- (3) $999 < a_n < 9999$ をみたす自然数 n をすべて求めなさい。ただし、本問では $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。