0002024725797999

首都大学東京

2015年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面において曲線 $y=\dfrac{3}{x^2+3}$ を C_1，曲線 $y=x^2+k$（k は定数）を C_2 とする．C_1 と C_2 のすべての共有点において互いの接線が直交しているとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 定数 k の値を求めなさい．また，C_1 と C_2 のすべての共有点の座標を求めなさい．

(2) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めなさい．

(注)「C_1 と C_2 は共有点をもち，かつ そのすべての共有点において，互いの接線が直交している」と解釈した．

下線部のままだと，共有点をもたない場合も含んでしまう．

(1) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3}$，$g(x)=x^2+k$ とおくと．

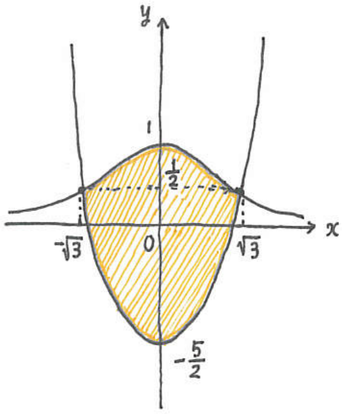
$f'(x)=\dfrac{-3\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$，$g'(x)=2x$

∴ 共有点の x 座標を α とおくと．

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\alpha^2+3}=\alpha^2+k & \cdots ① \\ \dfrac{-6\alpha}{(\alpha^2+3)^2}\cdot 2\alpha=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

②より．$(\alpha^2-3)^2=0$　　∴ $\alpha=\pm\sqrt{3}$

①に代入して．$\underline{k=-\dfrac{5}{2}\text{，共有点は }\left(\pm\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)}$ //



(2)

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}-\left(x^2-\frac{5}{2}\right)dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2+3}-x^2+\frac{5}{2}\,dx$$

$$=6\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}+2\int_0^{\sqrt{3}}-x^2+\frac{5}{2}\,dx$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\theta+2\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}}$$

（$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおいて置換積分した　$dx=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，$\begin{array}{c|c} x & 0\to\sqrt{3} \\ \theta & 0\to\frac{\pi}{4}\end{array}$）

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{4}+2\left(-\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+3\sqrt{3}}\ //$$