大阪市立大学

2015年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 1枚の硬貨を何回も投げ，表が2回続けて出たら終了する試行を行う．ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ．

(2) P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

(3) $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つことを示せ．

(1) 表表 のときのみなので，$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ //

う表表 のときのみなので，$P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ //

$\left\{\begin{array}{l} \text{うう表表} \\ \text{表う表表} \end{array}\right.$ のときなので，$P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2 = \frac{1}{8}$ //

(2) $n+1$ 回で終了するのは，($n \geqq 3$)

$\left\{\begin{array}{l} \text{1回目が裏で，残り } n \text{ 回投げて終了する} \\ \text{1回目が表，2回目が裏で，残り } n-1 \text{ 回投げて終了する} \end{array}\right.$

のどちらかであるから，

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n-1} \quad (n \geqq 3)$$ //

(1)の値を使って確認できる

(3) (2)と $P_{n-1} \geqq 0$ より，$P_{n+1} \geqq \frac{1}{2}P_n$ ($n \geqq 3$) これは $n=2$ でも成り立っている．よって，

$$P_{n+1} \geqq \frac{1}{2}P_n \quad (n \geqq 2) \cdots ①$$

また，$P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{2}P_{n-1}\right)$

$\leqq 0$ （∵①より）

∴ $n \geqq 3$ に対して，$P_{n+1} \leqq P_n$ これは $n=2$ のときも成り立っている

よって，$n \geqq 2$ のとき，$\frac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つ ▨