

2014年基礎工第4問

4 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \cos(2\pi x) dx, \quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \sin(2\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める. ただし, e は自然対数の底を表す.(1) a_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより,

$$a_n = -\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} b_n$$

がわかる.

一方, b_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより,

$$b_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}} a_n - \frac{e^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}} e^{\boxed{\text{カ}} n + \boxed{\text{キ}}}}$$

がわかる.

これらの関係式より, a_n は

$$a_n = \frac{\pi(e^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}})}{\boxed{\text{コ}} (\pi \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}) e^{\boxed{\text{ス}} n + \boxed{\text{セ}}}}$$

となることわかる.

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}} (\pi \boxed{\text{タ}} + \boxed{\text{チ}}) (e^{\boxed{\text{ツ}}} - e)}$ となる.