

2012年理(数・物・化)第3問

3 $\{\theta_k\}$ を初項 0, 公差 $\frac{\pi}{4}$ の等差数列, $\{r_k\}$ を初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列とし, 自然数 k に対して, 行列 A_k, B_k を

$$A_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & r_k \sin \theta_k \\ r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} r_k \cos \theta_k & -r_k \sin \theta_k \\ -r_k \sin \theta_k & -r_k \cos \theta_k \end{pmatrix}$$

とおく. $C_k = A_k A_{k+1}$, $D_k = B_k B_{k+1}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) C_k を k を用いて表せ.
- (2) D_k を k を用いて表せ.
- (3) m を自然数とするとき, 次の行列の和

$$\left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^2 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^4 + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{r_k r_{k+1}} C_k\right)^{2m}$$

を求めよ.

- (4) $C_k^2 D_k^2$ を求めよ.
- (5) 次の行列の和

$$C_1^2 D_1^2 + 2C_2^2 D_2^2 + 3C_3^2 D_3^2 + \cdots + nC_n^2 D_n^2$$

を $\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ を求めよ.

ただし, 必要ならば, 実数 a ($a > 1$) に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ が成り立つことを用いてよい.