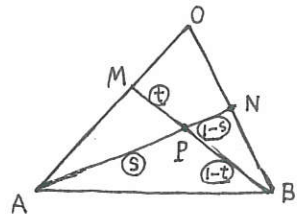
2015年 工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $\triangle$OABが $|\overrightarrow{OA}|=4$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\angle AOB=60^\circ$ を満たすとする．また，k を実数とし，辺OA上の点Mを $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$ と定める．さらに，辺OBの中点をN，線分BMと線分ANの交点をPとする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および k を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{OP}|=2$ となる k の値を求めよ．



(1) $AP:PN = s:(1-s)$

$MP:PB = t:(1-t)$

$(0<s, t<1)$ とおく．

$\triangle$OANにおいて考えると，$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\dfrac{s}{2}\overrightarrow{OB}\ \cdots①$

$\triangle$OMBにおいて考えると，$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=k(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ \cdots②$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立．よって①，②より $\begin{cases}1-s=k(1-t)\\ \dfrac{s}{2}=t\end{cases}$

$\therefore\ 1-s=k-k\cdot\dfrac{s}{2}$　　$\therefore\ s=\dfrac{2(k-1)}{k-2}$　　$\therefore$ ①に代入して，$\underline{\overrightarrow{OP}=\dfrac{k}{2-k}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1-k}{2-k}\overrightarrow{OB}}$ //

(2) (1)より，

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\left(\frac{k}{2-k}\right)^2|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{2k(1-k)}{(2-k)^2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left(\frac{1-k}{2-k}\right)^2|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=\left(\frac{k}{2-k}\right)^2\cdot16+\frac{2k(1-k)}{(2-k)^2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1-k}{2-k}\right)^2\cdot4$$

$$=\frac{4(3k^2+1)}{(2-k)^2}$$

$|\overrightarrow{OP}|=2$ より，$|\overrightarrow{OP}|^2=4$　　$\therefore\ 3k^2+1=(2-k)^2$

$\therefore\ 2k^2+4k-3=0$

ここで Mは辺OA上にあるので，$0\leqq k\leqq 1$　　$\therefore\ \underline{k=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}}$ //