

2016年都市教養（理系）第2問

2 n を自然数とし,

$$h(x) = x - n \log x$$

とおく。ただし、 $\log x$ は自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $x \geq 2n$ のとき、 $h'(x) \geq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示しなさい。ただし、 $h'(x)$ は $h(x)$ の導関数とする。
- (2) $x \geq 2n$ のとき、 $h(x) - h(2n) \geq \frac{1}{2}(x - 2n)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $x \geq 2n$ かつ $x \geq 2n - 2h(2n)$ のとき、 $h(x) \geq 0$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) (3) を利用して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$ が成り立つことを示しなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。