0001888451118999

昭和大学

2014年 医学部 第3問　　1枚目/3枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ．

(1) 1から8までの数字を1つずつ記した8個の球が袋の中に入っている．この袋から1個の球を取り出し，その数字を読み取ってはもとの袋に戻す操作を3回繰り返す．ただし，どの球が選ばれる確率も同じであるとする．いま，読み取った3個の数字のうち最大の数と最小の数の差を R とする．次の問に答えよ．

(1-1) $R=1$ となる確率を求めよ．

(1-2) $R=4$ となる確率を求めよ．

(1-3) R の期待値を求めよ．

(2) x についての2次方程式 $x^2+(\log_a 5)x+\log_5 a^2=0$ が相異なる負の解をもつための定数 a のとるべき値の範囲を求めよ．

(3) 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ とし，さらに，$A^2=B$ および $B^2=A$ を満たす行列 B が存在するとする．ただし a, b は実数で，$b>0$ とする．次の問に答えよ．

(3-1) 行列 A^3 を求めよ．

(3-2) a, b の値を求めよ．

(1) (1-1) すべてのとり出し方は，8^3 通り．

連続する数のえらび方は (1,2), (2,3), ⋯, (7,8) の7通り．

$$\therefore \frac{7\times2\times3}{8^3}=\frac{21}{256}$$

(1-2) 最大の数と最小の数のえらび方は (1,5), (2,6) ⋯ (4,8) の4通り

(i) 3つとも異なる数のとき．$4\times3\times3!=72$ 通り．

(ii) 2つが同じとき．　$4\times2\times3=24$ 通り

$$\therefore \frac{72+24}{8^3}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$$

$0\leqq k\leqq 7$ とする

(1-3) $R=k$ となるのは，$(1,k+1)$, $(2,k+2)$ ⋯ $(8-k,8)$ の $8-k$ 通り．

(i) 3つの数が異なるとき，$(8-k)\times(7-k)\times3!$

(ii) 2つが同じとき．$(8-k)\times2\times3$

$\therefore$ $R=k$ となるのは $\dfrac{6(8-k)(7-k)+6(8-k)}{8^3}$

計算けっこう大変！(略)

$$\therefore E(R)=\sum_{k=0}^{7}\frac{6(k-8)^2}{8^3}\times k=\sum_{k=0}^{7}\frac{6}{8^3}\cdot\underbrace{(k^3-16k^2+64k)}_{\text{公式つかう}}=\frac{63}{16}$$

昭和大学

2014年 医学部 第3問　　2枚目/3枚

数理 石井K

3 次の各問に答えよ．

(1) 1から8までの数字を1つずつ記した8個の球が袋の中に入っている．この袋から1個の球を取り出し，その数字を読み取ってはもとの袋に戻す操作を3回繰り返す．ただし，どの球が選ばれる確率も同じであるとする．いま，読み取った3個の数字のうち最大の数と最小の数の差を R とする．次の問に答えよ．

(1-1) $R=1$ となる確率を求めよ．

(1-2) $R=4$ となる確率を求めよ．

(1-3) R の期待値を求めよ．

(2) x についての2次方程式 $x^2+(\log_a 5)x+\log_5 a^2=0$ が相異なる負の解をもつための定数 a のとるべき値の範囲を求めよ．

(3) 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ とし，さらに，$A^2=B$ および $B^2=A$ を満たす行列 B が存在するとする．ただし a, b は実数で，$b>0$ とする．次の問に答えよ．

(3-1) 行列 A^3 を求めよ．

(3-2) a, b の値を求めよ．

(2) 判別式 $D>0$ と，$\alpha\beta>0$，$\alpha+\beta<0$ を考える．底 $a>0$，$a\neq1$ は必要条件．

$D=(\log_a 5)^2-4\log_5 a^2>0$　$\therefore \left(\dfrac{\log_5 5}{\log_5 a}\right)^2-8\log_5 a>0$

$\therefore$ $t=\log_5 a$ とおくと，$1-8t^3>0$　$\therefore (1-2t)(\underbrace{1+2t+4t^2}_{})>0$

$= (t+1)^2+t^3$ より正．

$\therefore\ 1-2t>0 \iff t<\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \log_5 a<\dfrac{1}{2} \iff a<\sqrt{5}$ $\cdots$ ①

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\log_a 5<0 \iff \dfrac{\log_5 5}{\log_5 a}>0$

$\therefore\ \log_5 a>0$ より　$a>1$ $\cdots$ ②

$\alpha\beta=\log_5 a^2>0$ より　$a>1$ $\cdots$ ③

$a>0$，$a\neq1$，①〜③ より，$\underline{1<a<\sqrt{5}}$ //

昭和大学

2014年 医学部 第3問　3枚目/3枚

数理 石井K

3 次の各問に答えよ．

(1) 1から8までの数字を1つずつ記した8個の球が袋の中に入っている．この袋から1個の球を取り出し，その数字を読み取ってはもとの袋に戻す操作を3回繰り返す．ただし，どの球が選ばれる確率も同じであるとする．いま，読み取った3個の数字のうち最大の数と最小の数の差を R とする．次の問に答えよ．

(1-1) $R=1$ となる確率を求めよ．

(1-2) $R=4$ となる確率を求めよ．

(1-3) R の期待値を求めよ．

(2) x についての2次方程式 $x^2+(\log_a 5)x+\log_5 a^2=0$ が相異なる負の解をもつための定数 a のとるべき値の範囲を求めよ．

(3) 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ とし，さらに，$A^2=B$ および $B^2=A$ を満たす行列 B が存在するとする．ただし a, b は実数で，$b>0$ とする．次の問に答えよ．

(3-1) 行列 A^3 を求めよ．

(3-2) a, b の値を求めよ．

(3) (3-1) 条件より $A=B^2=A^4$　また，$\det A=a^2+b^2>0$ より A^{-1} は存在する．

よって $A=A^4$ の両辺に A^{-1} をかけて，$\underline{A^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$ //

(3-2) A^3 を成分で (a, b を用いて) 表すと，

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \text{ より } A^3=\begin{pmatrix} a(a^2-b^2)-2ab^2 & 2a^2b+b(a^2-b^2) \\ -b(a^2-b^2)-2a^2b & -2ab^2+a(a^2-b^2) \end{pmatrix}$$

∴ (3-1) より，$a(a^2-b^2)-2ab^2=1$ かつ $2a^2b+b(a^2-b^2)=0$

$\iff a^3-3ab^2=1$ かつ $b(2a^2+a^2-b^2)=0$

$\iff a^3-3ab^2=1$ かつ ($b=0$ または $b^2=3a^2$)

$b>0$ より $\iff a^3-3ab^2=1$ かつ $b^2=3a^2$

∴ $a^3-3a\cdot 3a^2=1$　∴ $a^3=-\frac{1}{8}$

∴ $a=-\frac{1}{2}$ このとき，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (>0)　∴ $\underline{a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}}$ //