昭和大学

2015年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の各問に答えよ.

(1) 次の問に答えよ.

(1-1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(1-2) 極限値 $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3\cdot 1}{n^2+1^2}+\frac{n+3\cdot 2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+3\cdot n}{n^2+n^2}\right)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{8}$ となるような定数 a, b を求めよ.

(1) (1-1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad \left(\begin{array}{l} x=\tan\theta \text{ とし置換積分} \\ dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta,\ \begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{4} \end{array} \end{array} \right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4}} \,//$$

(1-2)

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n^2+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3\cdot\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1+3x}{1+x^2}dx \quad (\text{区分求積法により})$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^1\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1 \quad (\because (1\text{-}1)\text{より})$$

$$=\underline{\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\log 2}\,//$$

(2) $t=\pi-x$ とおくと.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}=\frac{1}{8}$$

$t\to 0$ のとき. 不定形 $\frac{0}{0}$ になることから $b=\sqrt{a-1}$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{a-1}}$$

$\therefore \dfrac{1}{4\sqrt{a-1}}=\dfrac{1}{8}$ より

$\underline{a=5}\,//$ $\underline{b=2}\,//$