

2014年理系第1問

(1) 降べきの順 (a について) に並べると.

1 次の を適当に補え.

$$(b-c)a^2 + (b^2 + 2c^2 - 3bc)a + 2bc(c-b) = (b-c)(a+b)(a-2c)$$

$= (b-c)(b-2c) \quad (a+b)(b-c)(a-2c)$

(1) $ab(a+b) - 2bc(b-c) + ca(2c-a) - 3abc$ を因数分解すると ア となる.

(2) 自然数 n をいくつかの 1 と 2 の和で表すときの表し方の総数を $a(n)$ とする. ただし, 和の順序を変えた表し方は同じ表し方とする. 例えば, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ であるから, $a(4) = 3$ である. このとき, $a(9) =$ イ , $a(2014) =$ ウ である.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \frac{n}{n+1}$ であるとき, $a_n =$ エ , $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} =$ オ である.

(4) $0 \leq \theta \leq \pi$ とする. $\sin \theta + \cos \theta = t$ とすると, t のとりうる値の範囲は カ $\leq t \leq$ キ であり, $\sin \theta + \cos \theta + 2 \sin 2\theta$ の最大値は ク , 最小値は ケ である.

(5) $\log_2 64 =$ コ である. また, x を 1 でない正の数とすると, $\log_4 x^2 - \log_x 64 \leq 1$ をみたす x の範囲は サ である.

(6) $f(x) = \sin 2x$ とするとき, $f'(x) =$ シ である. また, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2x \cos 2x dx =$ ス である.

(2) \leftarrow 意外とやや楽解!
 スを使う個数を x とすると, $n=9$ のときは $x=0, 1, 2, 3, 4 \therefore a(9) = 5$

$n=2014$ のときは, $x=0, 1, 2, \dots, 1007 \therefore a(2014) = 1008$

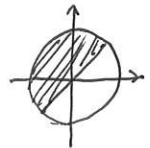
(3) $n \geq 2$ のとき, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

これは $n=1$ のときもみたしていい.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(4) $t = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$

$\therefore -1 \leq t \leq \sqrt{2}$ // また, $t^2 = 1 + \sin 2\theta$ //



(与式) $= t + 2(t^2 - 1) = 2t^2 + t - 2 = 2(t + \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{8}$

\therefore 最大値は $2 + \sqrt{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき), 最小値は $-\frac{17}{8}$

(5) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

$$\log_4 x^2 - \frac{\log_4 64}{\log_4 x} \leq 1 \iff \begin{cases} 0 < x < 1 \text{ のとき} \\ 2(\log_4 x)^2 - 3 \geq \log_4 x \\ x > 1 \text{ のとき} \\ 2(\log_4 x)^2 - 3 \leq \log_4 x \end{cases}$$

$\therefore 0 < x < 1$ のとき, $2t^2 - t - 3 \geq 0 \quad (2t-3)(t+1) \geq 0$
 ($t = \log_4 x$ とおいた, $t < 0$) $\therefore t \leq -1 \quad 0 < x \leq \frac{1}{4}$

$x > 1$ のとき, $(2t-3)(t+1) \leq 0 \quad 0 < t \leq \frac{3}{2} \therefore 1 < x \leq 8 \quad 0 < x \leq \frac{1}{4}, 1 < x \leq 8$

(6) $f'(x) = 2 \cos 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2x \cos 2x dx = \left[\frac{1}{6} \sin^3 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$