



2010年 理学部 第3問

3 $\triangle ABC$ において $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさと対辺の長さをそれぞれ A , B , C および a , b , c で表す. $\triangle ABC$ の面積を S とし, 3頂点を通る円の半径を R とする. $a \geq b \geq c$ とするとき以下の各問に答えよ.

- (1) $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$ を示せ.
- (2) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ を示せ.
- (3) $\frac{a^2}{S}$, $\frac{b^2}{S}$, $\frac{c^2}{S}$ のそれぞれを $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\frac{\cos B}{\sin B}$, $\frac{\cos C}{\sin C}$ を用いて表せ.
- (4) $\frac{\cos A}{\sin A} \leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C}$ を示せ.
- (5) $A \geq B \geq C$ を示せ.
- (6) $\frac{a^2}{S} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$ を示せ.
- (7) $\triangle ABC$ が正三角形であるためには $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることが必要十分であることを示せ.