2016年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$ を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(2) $a>0$，$b>0$，$c>0$ で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき，等式 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を証明せよ．

(3) $p>1$，$q>1$ のとき，不等式 $\log_p q + \log_q p \geqq 2$ を証明せよ．また，等号が成り立つときを調べよ．

(1) (左辺)−(右辺) $= \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$

$= \dfrac{1}{2}(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

$\geqq 0$

$\therefore$ $\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$ が成り立つ．等号成立は $x=y$ のとき ▨

(2) $x = \log_a b$ とおくと，$a^x = b$

両辺，底がcの対数をとると，$x \log_c a = \log_c b$

両辺を $\log_c a$ ($\neq 0$) で割って，$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ すなわち，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ▨

(3) (2)より，$\log_q p = \dfrac{\log_p p}{\log_p q} = \dfrac{1}{\log_p q}$

$\therefore$ $\log_p q + \log_q p = \log_p q + \dfrac{1}{\log_p q}$

$\geqq 2\sqrt{\log_p q \cdot \dfrac{1}{\log_p q}}$ （$\log_p q > 0$ より (1)の不等式を使った）

$= 2$

また，等号成立は，$\log_p q = \dfrac{1}{\log_p q} \iff (\log_p q)^2 = 1$

$\iff \log_p q = 1$

$\iff p = q$ のとき ▨