滋賀医科大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ は導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ をもち，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$f(x) > 0, \quad \{f'(x)\}^2 \leqq f(x)f''(x) \leqq 2\{f'(x)\}^2$$

を満たしている．$f(0) = a$，$f(1) = b$ とするとき，次の不等式を示せ．

(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq \dfrac{a+b}{2}$

(2) $f\left(\dfrac{1}{3}\right) \leqq \sqrt[3]{a^2b}$

(3) $f\left(\dfrac{1}{4}\right) \geqq \dfrac{4ab}{a+3b}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{4}b$