



2014年教育・生物資源 第5問

数理
石井K

5 実数 a に対して、下の4つの条件 p, q, r, s を考える。ただし、実数 k に対して、 $[k]$ は k 以下の最大の整数を表し、 $\langle k \rangle$ は k 以上の最小の整数を表すとする。たとえば、 $k = 2.15$ のとき、 $[k] = 2$ であり、 $\langle k \rangle = 3$ である。また、 $|k|$ は k の絶対値を表す。

$p: x^2 + 4x + a^2 = 0$ を満たす実数 x が存在する。

$q: [a] < \langle a \rangle$

$r: |a - 1.5| < \frac{1}{|a - 1.5| + 1.5}$

$s: 0 < a < \pi$, かつ、 $\sin\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2a + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

上の p, q, r, s それぞれについて、条件を満たす a の範囲を求めよ。さらに、以下の①, ②, ③それぞれについて、 p, q, r, s の中から、あてはまるものを全て答えよ。

① p であるための十分条件である。

② q であるための十分条件である。

③ r であるための十分条件である。

$x^2 + 4x + a^2 = 0$ の判別式を D とおくと、 $\frac{D}{4} = 4 - a^2 \geq 0 \quad \therefore p: -2 \leq a \leq 2$ //

$a - 1 < [a] \leq a, a \leq \langle a \rangle < a + 1 \quad \therefore q: a \text{ は整数以外の実数}$ //

• $a \geq 1.5$ のとき。

$$a - 1.5 < \frac{1}{a} \quad \therefore a(a - 1.5) - 1 < 0 \quad \therefore 2a^2 - 3a - 2 < 0$$

$$\therefore (2a + 1)(a - 2) < 0 \text{ より、} -\frac{1}{2} < a < 2 \text{ となり } a \geq 1.5 \text{ なので、} \frac{3}{2} \leq a < 2 \dots \textcircled{A}$$

• $a < 1.5$ のとき。

$$1.5 - a < \frac{1}{3 - a} \quad \therefore (3 - a)(1.5 - a) - 1 < 0 \quad \therefore (2a - 7)(a - 1) < 0$$

$$\therefore 1 < a < \frac{7}{2} \text{ となり、} a < 1.5 \text{ より、} 1 < a < \frac{3}{2} \dots \textcircled{B}$$

①, ② より、 $r: 1 < a < 2$ //

$$\sin\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 2a \quad 0 < a < \pi \text{ より、} \underline{s: a = \frac{\pi}{2}}$$
 //

以上より ① (p), r, s, ② (q), r, s, ③ (r), s //

(注) $p \Rightarrow p$ であるので、自分自身も十分条件となるが、
なくてもよいと思われるので、かゝり表記した