鳥取大学

2016年 地域 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ を以下のように定める.

$$1^2,\ 1^2+3^2,\ 1^2+3^2+5^2,\ \cdots,\ 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2,\ \cdots$$

また, 数列 $\{b_n\}$ を以下のように定める.

$$2^2,\ 2^2+4^2,\ 2^2+4^2+6^2,\ \cdots,\ 2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2,\ \cdots$$

このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, n は自然数とする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n を用いて表せ.
(2) 数列 $\{a_n-b_n\}$ の第 n 項を n を用いて表せ.
(3) $c_n=a_{n+1}-b_n$ とおくとき, $c_n>100(n+1)$ となる最小の n を求めよ.

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\underline{\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)}$ //

(2) $b_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore\ a_n-b_n=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=\underline{-n(2n+1)}$ //

(3) $c_n=a_{n+1}-b_n$

$=a_{n+1}-b_{n+1}+b_{n+1}-b_n$

数列 $\{b_n\}$ の決め方より,

$b_{n+1}-b_n=(2n+2)^2$

$=4(n+1)^2$

(2)より, $=-(n+1)(2n+3)$

$\therefore\ c_n>100(n+1) \iff -(n+1)(2n+3)+4(n+1)^2>100(n+1)$

$\iff (n+1)\{-2n-3+4(n+1)-100\}>0$

$\iff (n+1)(2n-99)>0$

$\therefore$ 最小の n は. $\underline{n=50}$ //