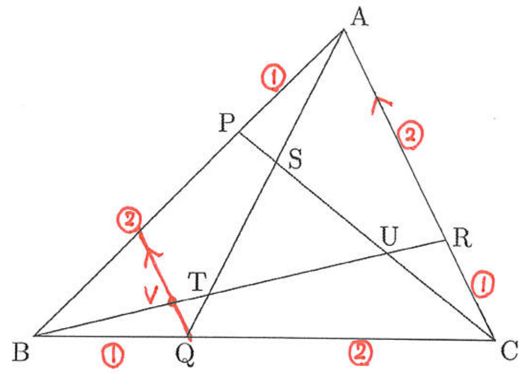
0001857092418999

山形大学

2014年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 三角形ABCの各辺AB，BC，CAを1：2に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする．AQとCPの交点をS，BRとAQの交点をT，CPとBRの交点をUとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とするとき，次の問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{AQ}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．　　(1) $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ //

(2) 点Qを通り辺ACと平行な直線と，BRの交点をVとするとき，$\overrightarrow{VQ}$を$\vec{c}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AT}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{AS}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(5) $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\angle BAC=90^\circ$であるとき，$|\overrightarrow{ST}|$，$|\overrightarrow{SU}|$，$\angle TSU$および三角形STUの面積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{VQ}=k\vec{c}$ とおくと．$\overrightarrow{BV}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QV}$ より $\overrightarrow{BV}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{VQ}$

$\therefore \overrightarrow{BV}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\left(\frac{1}{3}-k\right)\vec{c}$

B，V，Rは一直線上にあるので，$\overrightarrow{BV}=m\overrightarrow{BR}$ と表せる．

$\therefore -\frac{1}{3}\vec{b}+\left(\frac{1}{3}-k\right)\vec{c}=-m\vec{b}+\frac{2}{3}m\vec{c}$

$\therefore$ $\vec{b}$と$\vec{c}$は一次独立より 係数を比較して，$m=\frac{1}{3}$，$k=\frac{1}{9}$

$\therefore \overrightarrow{VQ}=\frac{1}{9}\vec{c}$ //

(3) (2)より．$|\overrightarrow{VQ}|=\frac{1}{9}|\vec{c}|$　△TVQ ∽ △TRA　相似比は $\frac{1}{9}:\frac{2}{3}=1:6$

$\therefore$ AT：TQ＝6：1，AT：AQ＝6：7　$\therefore \overrightarrow{AT}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$ //

(4) メネラウスの定理より．$\frac{PB}{AP}\cdot\frac{CQ}{BC}\cdot\frac{AS}{QS}=1$

$\therefore \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{AS}{QS}=1 \iff$ AS：QS＝3：4　$\therefore \overrightarrow{AS}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AQ}$

$=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$ //

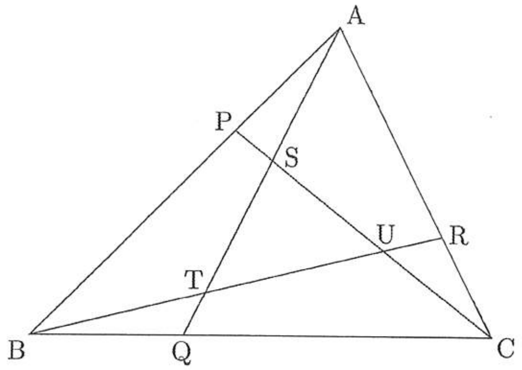
2枚目につづく

山形大学

2014年 医学部 第2問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 三角形ABCの各辺AB，BC，CAを1：2に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする．AQとCPの交点をS，BRとAQの交点をT，CPとBRの交点をUとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点Qを通り辺ACと平行な直線と，BRの交点をVとするとき，$\overrightarrow{VQ}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AT}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{AS}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(5) $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\angle BAC=90^\circ$ であるとき，$|\overrightarrow{ST}|$，$|\overrightarrow{SU}|$，$\angle TSU$ および三角形STUの面積を求めよ．

(5). $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AS}=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$ （∵(3), (4)より）

$\therefore |\overrightarrow{ST}|^2=\frac{4}{49}|\vec{b}|^2+2\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{49}|\vec{c}|^2=\frac{1}{7}$　$\therefore \underline{|\overrightarrow{ST}|=\frac{\sqrt{7}}{7}}$ //

このとき，AS：ST：TQ ＝ 3：3：1 となるので，同様にして，

CU：US：SP ＝ 3：3：1

$\therefore \overrightarrow{SU}=\frac{3}{7}\overrightarrow{PC}=\frac{3}{7}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=-\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$

$\therefore |\overrightarrow{SU}|^2=\frac{1}{49}|\vec{b}|^2-2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{9}{49}|\vec{c}|^2=\frac{4}{7}$　$\therefore \underline{|\overrightarrow{SU}|=\frac{2\sqrt{7}}{7}}$ //

$$\cos\angle TSU=\frac{\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{SU}}{|\overrightarrow{ST}||\overrightarrow{SU}|}=\frac{(\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c})\cdot(-\frac{1}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c})}{\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \underline{\angle TSU=60^\circ}$ //

$\triangle STU=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{ST}||\overrightarrow{SU}|\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{14}}$ //