津田塾大学

2015年 学芸（国際関係） 第2問

$\boxed{2}$ $f(x) = 4x^3 - 3x + c$ とする．

(1) $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつような c の値の範囲を求めよ．

(2) $c = \sin 3\theta$ $(-30^\circ < \theta < 30^\circ)$ とする．このとき $f(x) = 0$ の3つの解を $a\cos\theta + b\sin\theta$ の形で表せ．ただし，a, b は定数とする．

(1) $f'(x) = 12x^2 - 3$

$= 12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$c+1$	$\searrow$	$c-1$	$\nearrow$
		極大		極小	

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + c = c+1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + c = c-1$

∴ $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつのは，増減表より，

$c+1 > 0$ かつ $c-1 < 0$ ∴ $\underline{-1 < c < 1}$ //

(2) $c = \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より，

$f(x) = 4x^3 - 3x + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 4(x^3 - \sin^3\theta) - 3(x - \sin\theta)$

$= 4(x-\sin\theta)(x^2 + x\sin\theta + \sin^2\theta) - 3(x-\sin\theta)$

$= (x-\sin\theta)(4x^2 + 4x\sin\theta + 4\sin^2\theta - 3)$

$4x^2 + 4x\sin\theta + 4\sin^2\theta - 3 = 0$ のとき，解の公式より，

$$x = \frac{-4\sin\theta \pm \sqrt{16\sin^2\theta - 16(4\sin^2\theta - 3)}}{8}$$

$$= \frac{-\sin\theta \pm \sqrt{3(1-\sin^2\theta)}}{2}$$

$$= \frac{-\sin\theta \pm \sqrt{3}\,|\cos\theta|}{2}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta$ （∵ $-30^\circ < \theta < 30^\circ$ より，$\cos\theta > 0$）

∴ 3つの解は，$\underline{x = \sin\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta}$ //