

九州大学

2013年理系第5問

5 実数 x, y, t に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える. $(AB)^2$ が対角行列, すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする.

(1) 命題「 $3x - 3y - 2t \neq 0 \implies A = tB$ 」を証明せよ.

以下(2), (3), (4)では, さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする. ただし, E は単位行列を表す.

(2) $3x - 3y - 2t = 0$ を示せ.

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ.

(4) x, y, t が整数のとき, 行列 A を求めよ.