高知大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)x & (-1 \leqq x \leqq 0 \text{ のとき})\\ -\dfrac{1}{2}x(x-1) & (0 < x \leqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $y=f'(x)$ のグラフを $-1<x<1$ の範囲でかき，$f'(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうかを理由をつけて述べよ．

(4) $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

数理 石井K

(1) $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{-\frac{1}{2}h(h-1)-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}-\frac{1}{2}(h-1)$

$=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\frac{1}{2}h(h+1)-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to-0}\frac{1}{2}(h+1)$

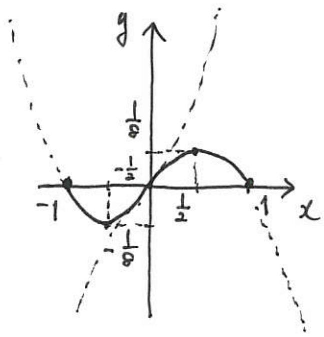
$=\frac{1}{2}$

(1)のつづき．よって．$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{1}{2}$ が存在するので，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能 ▨

(2) (i) $-1\leqq x\leqq 0$ のとき．$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，

(ii) $0<x\leqq1$ のとき $f(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$

よって右のグラフになる



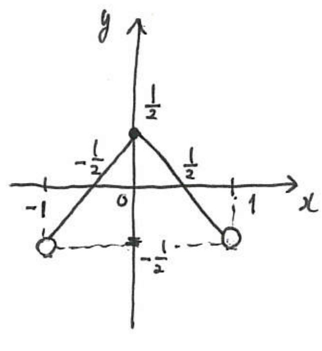
(3) (i) $-1<x<0$ のとき，$f'(x)=x+\frac{1}{2}$

(ii) $0<x<1$ のとき $f'(x)=-x+\frac{1}{2}$

(iii) $x=0$ のとき (1)より $f'(0)=\frac{1}{2}$

よって右のグラフになる．$\displaystyle -1=\lim_{h\to+0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=1$ より

微分可能ではない //



(4) (2)より．$f(x)$ は奇関数なので，

$$V=2\pi\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}x(x-1)\right\}^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1x^2(x-1)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{60}$$ //