

2012年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第4問

4 次の各問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) n を自然数とする。 x の関数 $f(x) = x^n e^{1-x}$ について、 $0 < x < 1$ ならば $0 < f(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) 自然数 n に対して $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ とおくと、 I_1 を求めよ。さらに、 I_{n+1} と I_n の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) (2)の I_n に対して $a_n = \frac{I_n}{n!}$ とおくと、 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = a_1 - a_n$ であることを示せ。
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e - 1$ であることを示せ。