



2010年理学部第2問

2  $p$  を  $0 < p < 1$  を満たす有理数の定数とし、関数  $f(x)$  を  $f(x) = |x|^p$  と定める。以下の各問に答えよ。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  の概形を描け。
- (2)  $a$  を 0 でない実数の定数とするとき、点  $(a, f(a))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線の方程式を求めよ。また、接線と  $x$  軸の交点の  $x$  座標を求めよ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  を次のように定める： $a_1 = 1$  とし、 $n \geq 2$  のとき  $a_n$  を点  $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標とする。このとき一般項  $a_n$  を  $n$  と  $p$  を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた数列  $\{a_n\}$  について、点  $(a_n, f(a_n))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線と、 $x$  軸、および直線  $x = a_n$  とで囲まれた部分の面積を  $T_n$  とする。 $T_n$  を  $n$  と  $p$  を用いて表せ。
- (5) (4) の  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) について、無限級数  $T_1 + T_2 + T_3 + \dots$  が収束する  $p$  の範囲を求めよ。また、収束するときの無限級数の値を求めよ。