

2012年 第3問

3 a を正の定数とし、次のように定められた2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ。
- (2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ。さらに、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) b_3, b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ。さらに、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ。
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。