



2012年理工（理数選抜）第3問

3  $h > 0, d \geq 0$ とし、座標空間において4点  $A(0, 0, 1), B(0, 0, -1), C(h, 0, -d), D(0, h, d)$  を頂点とする四面体を考える。さらに  $CD = 2$  とする。したがって、四面体の6本の辺のうち向かい合う2辺の長さは3組とも互いに等しい。つまり

$$AB = CD, \quad AC = BD, \quad AD = BC$$

となっており、4つの面はすべて互いに合同である。この四面体  $ABCD$  について以下の問いに答えよ。

(1)  $h$  を  $d$  で表し、 $d$  のとりうる値の範囲を求めよ。

点  $A$  を通り平面  $BCD$  に垂直な直線と平面  $BCD$  の交点を  $P$  とおく。この点  $P$  を点  $A$  から平面  $BCD$  へ下ろした垂線の足とよぶ。同様に、点  $B$  から平面  $ACD$  へ下ろした垂線の足を  $Q$ 、点  $C$  から平面  $ABD$  へ下ろした垂線の足を  $R$ 、点  $D$  から平面  $ABC$  へ下ろした垂線の足を  $S$  とおく。

(2) 点  $R, S$  は直線  $AB$  上にあることに注意して、 $R, S$  の座標を  $d$  で表せ。また、四面体  $ABCD$  の対称性を考慮して、点  $P, Q$  の座標を  $d$  で表せ。さらに、計算により  $\vec{AP} \cdot \vec{BQ} = 0$  を確認せよ。

(3) 辺  $BD$  の長さのとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 平面  $ABC$  と平面  $ACD$  が直線  $AC$  に沿って角度  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) で交わっている。 $\theta$  のとりうる値の範囲を求めよ。ただし2平面の交わる角度とは、それぞれの平面に直交する2直線のなす角度である。