

2013年理工A方式第3問

 数理
石井K

3 x, y, z, a を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix}$ について,

$$B = A + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定めた行列 B が

$$B^2 = A^2 + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

を満たしている. このとき, x, y, z の値を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-2 \\ x & y+1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a-2 \\ x & y+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a-2 \\ x & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)x & (a-2)(y+1) \\ x(y+1) & (a-2)x + (y+1)^2 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ax & a+ay \\ x+xy & ax+y^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-3 & a+ay-2 \\ x+xy & ax+y^2+z \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}$$

①と②の各成分を比較して.

$$\begin{cases} ax-2x = ax-3 & \dots \textcircled{3} \\ ay+a-2y-2 = a+ay-2 & \dots \textcircled{4} \\ xy+x = x+xy & \dots \textcircled{5} \\ ax-2x+y^2+2y+1 = ax+y^2+z & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } x = \frac{3}{2} \quad \textcircled{4} \text{ より, } y = 0$$

これらを⑥に代入して, $z = -2$

$$\text{以上より, } \underline{x = \frac{3}{2}, y = 0, z = -2} \text{ ”}$$