

2012年 歯・薬学部 (中期) 第1問



1 $xy = 1000, x \geq 10, y \geq \frac{1}{10}$ とする.

(1) $\log_{10} x$ は, $x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} & \text{ウ} & \text{エ} & \text{オ} \\ \hline \end{array}$ のとき最大値 $\begin{array}{|c|} \hline \text{カ} \\ \hline \end{array}$ をとる.

(2) $\log_{10} x \cdot \log_{10} y$ は

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{キ} & \text{ク} \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ケ} & \text{コ} \\ \hline \end{array}}, \quad y = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{サ} & \text{シ} \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ス} & \text{セ} \\ \hline \end{array}}$$

のときに最大値 $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \end{array} 9}{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array} 4}$ をとり,

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{チ} & \text{ツ} & \text{テ} & \text{ト} & \text{ナ} \\ \hline \end{array}, \quad y = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ニ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ヌ} & \text{ネ} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}}$$

のときに最小値 $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ノ} & \text{ハ} \\ \hline \end{array} - 4$ をとる.

(1) $y = \frac{1000}{x}$ で, $y \geq \frac{1}{10}$ より, $\frac{1000}{x} \geq \frac{1}{10} \therefore x > 0$ より, $x \leq 10000$

$\therefore \log_{10} x$ は, $x = 10000$ のとき, 最大値 4 をとる

$$\begin{aligned} (2) \log_{10} x \cdot \log_{10} y &= \log_{10} x \cdot \log_{10} \frac{1000}{x} \\ &= \log_{10} x \cdot (3 - \log_{10} x) \end{aligned}$$

ここで, $t = \log_{10} x$ とおくと, (1) と $x \geq 10$ より, $1 \leq t \leq 4$

$$\therefore \log_{10} x \cdot \log_{10} y = t(3-t) \quad (1 \leq t \leq 4)$$

$$= -t^2 + 3t$$

$$= -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$\therefore t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}, y = 10\sqrt{10}$ のとき, 最大値 $\frac{9}{4}$ をとる.

また, $t = 4 \Leftrightarrow x = 10000, y = \frac{1}{10}$ のとき, 最小値 -4 をとる